Beltratti A. e M. Manera (2000), "Microeconomia e scelte finanziarie", in R. Tangorra (a cura di), *Temi e Problemi di Microeconomia*, Milano: Egea.

1. Introduzione

In questo approfondimento affronteremo lo studio del comportamento individuale in condizioni rischiose. In particolare, cercheremo di spiegare in che modo un individuo decide di allocare la propria ricchezza tra diverse attività finanziarie. Esempi di attività finanziarie sono i titoli azionari, il cui valore dipende dal prezzo stabilito sul mercato. L'acquisto di un titolo azionario quindi espone l'acquirente ad incertezza sul valore futuro della propria ricchezza, che fluttuerà assieme ai prezzi di mercato.

Come esempio, consideriamo un individuo che al primo gennaio di un certo anno vuole usare la sua ricchezza pari a 10000 euro per acquistare alcune attività finanziarie con lo scopo di rivenderle alla fine dell'anno e acquistare un autoveicolo. L'individuo ha un forte incentivo ad aumentare al massimo il valore monetario della sua ricchezza alla fine dell'anno, dal momento che il tipo di autoveicolo che potrà acquistare dipenderà dal suo potere d'acquisto. L'individuo vuole quindi acquistare titoli finanziari il cui prezzo salirà molto nel corso dell'anno, diciamo titoli azionari di società che producono servizi per Internet (Internet stocks). D'altra parte, l'acquisto di Internet stocks sottopone l'individuo a un forte rischio. Se tutti gli Internet stocks diminuiscono nel corso dell'anno, la richezza dell'individuo potrebbe scendere a 5000 o 7000 euro anziché aumentare, sottoponendolo al rischio di non poter acquistare affatto l'autovettura. Ecco una situazione rischiosa: l'individuo vuole aumentare il valore della sua ricchezza a fine anno ma non vuole rischiare di perdere soldi nel tentativo.

Gli elementi fondamentali di un modello microeconomico di scelte finanziarie sono:

- le *variabili di scelta* del decisore (in questo caso quanto acquistare di ogni titolo finanziario disponibile);
- la definizione degli *scenari* possibili, noti anche come *stati di natura* (in questo caso i prezzi di mercato dei titoli finanziari alla fine dell'anno);
- l'analisi delle *conseguenze* dei vari scenari sulla ricchezza del decisore (in questo caso il valore della ricchezza dell'individuo alla fine dell'anno come funzione dei prezzi di mercato dei titoli finanziari);
- l'attribuzione di *probabilità* agli scenari;

- la definizione della *utilità* che il decisore ottiene nei vari scenari (in questo caso l'utilità della ricchezza alla fine dell'anno nei vari scenari, o *utilità alla von Neumann-Morgenstern*).

Di questi concetti ci occuperemo nei prossimi paragrafi.

2. I concetti fondamentali di un modello microeconomico di scelte finanziarie

Le *variabili di scelta* del decisore sono le attività finanziarie tra cui l'individuo decide di allocare la propria ricchezza.

Si ipotizza che l'individuo sia in grado di elencare tutte le possibili situazioni future riguardanti il valore delle attività finanziarie. Si ipotizza, cioè, l'esistenza di un insieme di *stati di natura* $\Phi = \{1,2,...,K\}$. Uno stato di natura è una descrizione completa dell'ambiente economico in cui si troverà l'individuo una volta presa una data decisione. Se, per esempio, il decisore è interessato al valore di un titolo azionario alla fine dell'anno, egli potrà definire un insieme di stati di natura di questo tipo: $\Phi = \{1,2\}$, dove 1 indica che "il prezzo del titolo è sceso" mentre 2 indica che "il prezzo del titolo è salito".

La *probabilità* del generico stato di natura k (k=1,…,K), ossia il grado di fiducia che si realizzi lo stato di natura k, viene indicata con p_k, dove p_k è un numero non negativo e $p_1+p_2+\ldots+p_K=1$.

L'individuo sceglie tra diverse attività finanziarie. Ciascuna di esse offre un *rendimento* che dipende dallo stato di natura k. Il rendimento è un numero puro, in quanto è dato dalla variazione percentuale del prezzo di un'attività finanziaria. Si indichi con R_{Ak} il rendimento dell'attività finanziaria A quando si avvera lo stato di natura k.

E' opportuno pensare al rendimento realizzato su un titolo in un certo stato di natura come alla realizzazione di una *variabile casuale*. Prima della realizzazione di un dato stato di natura, il rendimento è una variabile caratterizzata da un insieme di valori possibili, a ciascuno dei quali è associata una data probabilità. Quando uno stato di natura si realizza, la variabile casuale si realizza, cioè assume, tra tutti i valori possibili, quel valore corrispondente allo stato di natura realizzatosi. Il rischio insito in una scelta finanziaria è evidente: l'individuo che acquista un titolo rischioso non sa con certezza, all'atto dell'acquisto, quale sarà il valore della sua ricchezza dopo la realizzazione del rendimento. Ipotizzando che la variabile casuale rendimento dell'attività finanziaria A possa avere

solo due realizzazioni possibili (k=1,2), potremo descrivere tale rendimento nel seguente modo: $R_{Ak} = r_{A1}$ con probabilità p_1; $R_{Ak} = r_{A2}$ con probabilità p_2. Ovviamente, $p_1 + p_2 = 1$.
Una variabile casuale può essere descritta mediante la *funzione di probabilità* (o *distribuzione*). Nel caso in cui la variabile casuale rendimento, R_{Ak}, assuma un numero finito di valori, $r_1, r_2, \ldots, r_K$, la funzione di probabilità è rappresentata da K numeri reali non negativi p_k la cui somma è pari a uno. Il generico p_k rappresenta la probabilità che la variabile casuale R_{Ak} assuma il valore r_{Ak}.

Per esempio, si supponga che un individuo, interessato ad acquistare azioni di una certa impresa A, abbia di fronte la seguente funzione di probabilità del rendimento di tale titolo:

Tabella 1. Funzione di probabilità del rendimento dell'azione A

Stati di natura (k)	Valori (r_{Ak}) del rendimento (R_{Ak})	Probabilità (p_k)
1	10	0.3
2	8	0.2
3	15	0.1
4	22	0.2
5	18	0.2
		Somma = 1.0

L'investitore vuole riassumere tale distribuzione calcolando due misure di sintesi, la prima in grado di fornire informazioni sulla dimensione del rendimento, la seconda in grado di misurare il rischio connesso all'investimento. La misura più naturale della dimensione del rendimento è data dal *valore atteso* o *medio* del rendimento (o, semplicemente, *rendimento atteso*). Il rendimento atteso si calcola come media ponderata di tutti i rendimenti possibili, dove il peso di ciascun rendimento possibile è dato dalla rispettiva probabilità. Utilizzando i dati della Tabella 1 otteniamo:

$$\mu_A = p_1 r_{A1} + p_2 r_{A2} + \ldots + p_5 r_{A5} =$$
$$= (0.3)(10) + (0.2)(8) + (0.1)(15) + (0.2)(22) + (0.2)(18) = 14.1$$

Meno ovvia è la scelta di una misura per il rischio. Come abbiamo già avuto modo di notare, il rischio è presente perché l'investitore non sa con certezza, all'atto di investire nel titolo A, quale dei cinque possibili rendimenti si realizzerà. Sembra logico ritenere che maggiori sono le differenze tra i possibili rendimenti, maggiore è il rischio connesso all'investimento. Viceversa, se i rendimenti possibili non differiscono tra loro di molto, minore è il rischio. Al limite, se tutti i possibili rendimenti fossero uguali tra loro, non serve ricorrere a una funzione di probabilità per descrivere il rendimento del titolo A. In questo caso, infatti, il rendimento di A non è una variabile casuale, in quanto esiste solo una realizzazione possibile del rendimento con associata una probabilità pari a uno, e l'investitore si trova a decidere in condizioni di certezza. La più popolare misura della dispersione dei rendimenti possibili è data dalla *varianza* del rendimento (o dalla radice quadrata di tale varianza, nota con il nome di *deviazione standard*). La varianza del rendimento si calcola come media ponderata dei quadrati delle differenze tra ciascun rendimento possibile e il rendimento atteso, usando ancora una volta come pesi le probabilità. Facendo riferimento ai dati della Tabella 1, otteniamo:

$$\sigma^2_A = p_1(r_{A1}-\mu_A)^2 + p_2(r_{A2}-\mu_A)^2 + \ldots + p_5(r_{A5}-\mu_A)^2 =$$
$$= (0.3)(10-14.1)^2 + (0.2)(8-14.1)^2 + (0.1)(15-14.1)^2 + (0.2)(22-14.1)^2 + (0.2)(18-14.1)^2 = 28.09$$

La deviazione standard è dunque:

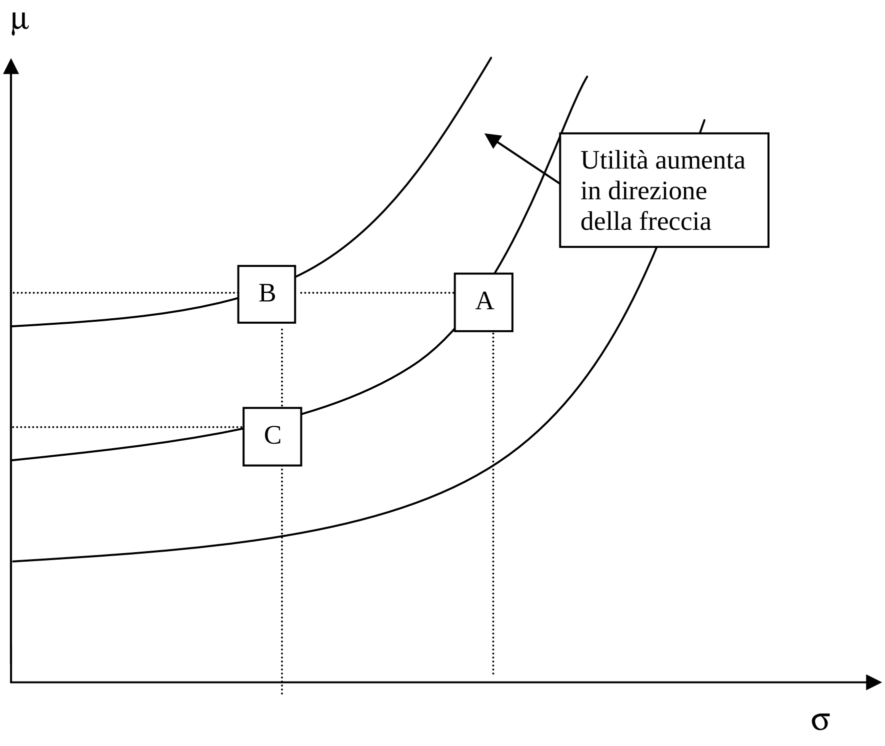
$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = 5.3$$

3. Rappresentazione delle preferenze di un individuo avverso al rischio

Come già sappiamo, un individuo può essere *avverso al rischio*, indifferente al rischio o amante del rischio. L'utilità alla von Neumann-Morgenstern di un individuo avverso al rischio, espressa come funzione della sua ricchezza, è concava: la sua utilità cresce, ma a un tasso decrescente, al crescere della sua ricchezza. In condizioni di rischio l'individuo massimizza, seguendo la teoria di von Neumann-Morgenstern, la propria *utilità attesa*. Un individuo avverso al rischio non partecipa a una scommessa attuarialmente equa (cioè una scommessa il cui valore atteso è nullo), in quanto la sua utilità attesa nel caso in cui partecipasse alla scommessa è inferiore all'utilità che otterrebbe non scommettendo. Infine, un individuo avverso al rischio, posto di fronte ad alternative caratterizzate dallo stesso valore atteso, sceglie sempre l'alternativa meno rischiosa.

Al solo fine di illustrare il significato delle curve di indifferenza nel contesto delle scelte individuali in condizioni di rischio, prendiamo in esame il seguente esempio. Consideriamo un individuo avverso al rischio che deve decidere se investire la propria ricchezza nel titolo A oppure nel titolo B. Ipotizziamo che i due titoli presentino rendimenti attesi identici, ma l'investimento A sia più rischioso (cioè caratterizzato da una deviazione standard più alta). E' possibile rappresentare tali preferenze con una mappa di curve di indifferenza espresse in termini di rendimento atteso (μ) e di deviazione standard del rendimento (σ). Tutte le combinazioni (μ,σ) che giacciono sulla stessa curva di indifferenza conferiscono all'individuo lo stesso livello di utilità attesa.

Figura 1. Curve di indifferenza di un individuo avverso al rischio espresse in termini di rendimento atteso (μ) e deviazione standard del rendimento (σ) di un'attivita finanziaria



Gli investimenti A e B, avendo lo stesso rendimento atteso ma differenti deviazioni standard, non conferiscono a un investitore avverso al rischio lo stesso livello di utilità attesa. In particolare, l'investimento A, che è più rischioso, si troverà su una curva di indifferenza più bassa rispetto all'investimento B (v. Figura 1). Sempre nella Figura 1 si vede come l'investitore avverso al rischio sia indifferente tra gli investimenti A e C, in quanto l'investimento A è sì caratterizzato da un rischio più elevato, ma offre anche un rendimento atteso più alto a compensazione del maggior rischio. Questo significa che le curve di indifferenza di un investitore avverso al rischio sono *inclinate positivamente*. Inoltre, per un dato valore di μ, l'utilità attesa di un individuo avverso al rischio decresce (a un tasso crescente) al crescere di σ. In altre parole, al crescere di σ sono necessari incrementi sempre maggiori di μ per mantenere costante l'utilità attesa dell'investitore. Le curve di indifferenza di un investitore avverso al rischio sono dunque *convesse*.

4. Elementi di teoria del portafoglio

Finora ci siamo occupati di un investitore il quale, pur avendo di fronte più alternative, decide di investire tutta la propria ricchezza in un'*unica* attività finanziaria. Sappiamo invece che nella realtà un individuo investe la propria ricchezza in un insieme (o *portafoglio*) di attività finanziarie. Se la deviazione standard del rendimento di un titolo dà informazioni sul rischio connesso all'investimento in detta attività finanziaria, la deviazione standard del rendimento di un portafoglio fornisce un'appropriata misura del rischio di quel portafoglio.

Le ipotesi alla base della teoria del portafoglio sono due: i) i rendimenti delle attività finanziarie sono caratterizzati da una specifica funzione di probabilità, detta *normale*; ii) gli investitori sono avversi al rischio. Date queste ipotesi, è possibile dimostrare che è razionale per un investitore che intenda massimizzare la propria utilità attesa detenere un portafoglio diversificato di attività finanziarie.

Il rendimento atteso del portafoglio, μ_P, è dato dalla media ponderata dei rendimenti attesi delle singole attività finanziarie che lo compongono, con pesi pari alla proporzione con cui ciascuna attività finanziaria compare nel portafoglio.
La deviazione standard del rendimento del portafoglio, σ_P, dipende non solo dal rischio di ciascuna singola attività finanziaria componente il portafoglio, ma anche dalle relazioni esistenti tra le diverse attività finanziarie in termini di rischio, misurate dal cosiddetto *coefficiente di correlazione*. Il coefficiente di correlazione è un numero compreso tra –1 e +1 inclusi che misura il legame lineare esistente tra i rendimenti di due attività finanziarie. Data una coppia di attività finanziarie A e B, il coefficiente di correlazione si indica con ρ_{AB}. In particolare, se $\rho_{AB} = +1$, vi è una perfetta relazione lineare positiva tra i rendimenti delle due attività finanziarie; se $\rho_{AB} = -1$, vi è una perfetta relazione lineare negativa tra i rendimenti delle due attività finanziarie; se $\rho_{AB} = 0$, non esiste una

relazione lineare tra i rendimenti delle due attività finanziarie. Si noti che, per definizione, $\rho_{AB}=\rho_{BA}$ e che $\rho_{AA}=\rho_{BB}= 1$ (v. Nota).

A titolo di esempio, si ipotizzi una situazione in cui un individuo voglia costruire un portafoglio composto da due attività, A e B. Siano i rendimenti attesi delle due attività $\mu_A = 1$ e $\mu_B = 3$, mentre le deviazioni standard dei rendimenti siano pari a $\sigma_A = 3$ e $\sigma_B = 4$. La correlazione tra i rendimenti sia $\rho_{AB} = -0.3$. L'investitore è libero di scegliere le proporzioni q_A e q_B con cui le due attività finanziarie compaiono nel portafoglio, purchè siano entrambe positive e soddisfino la relazione $q_A + q_B = 1$. Dato che il numero di portafogli che soddisfano tali requisiti è infinito, scegliamo per q_A i valori compresi tra 0 e 1 inclusi, con incremento 0.1.
Il rendimento atteso del portafoglio è dato da:

$$\mu_P = q_A\mu_A + q_B\mu_B$$

La varianza del rendimento del portafoglio è data da:

$$\sigma^2_P = q^2_A\sigma^2_A + 2q_Aq_B\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + q^2_B\sigma^2_B$$

Sostituendo in queste formule i dati dell'esempio otteniamo i risultati riportati nella Tabella 2.

Tabella 2. Rendimento atteso e deviazione standard del rendimento di un portafoglio P composto dalle attività finanziarie A e B, al variare di q_A e q_B e a parità di ρ_{AB}

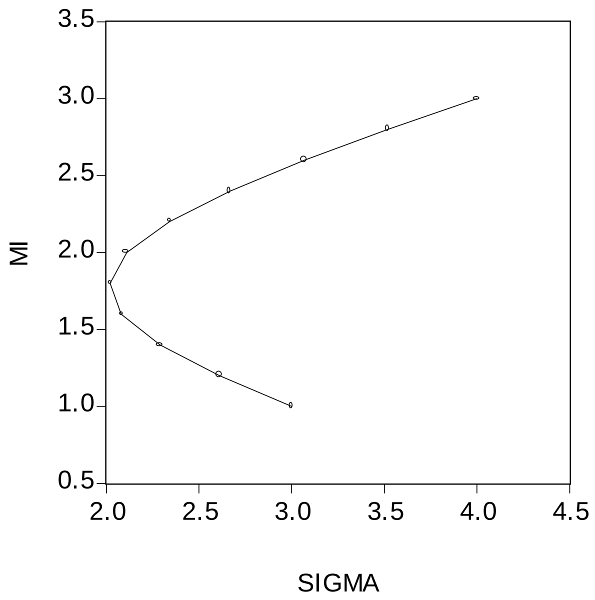
P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q_A	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
q_B	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
μ_P	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0
σ^2_P	16	12.4	9.45	7.14	5.47	4.45	4.07	4.34	5.25	6.8	9.0
σ_P	4	3.52	3.07	2.67	2.34	2.11	2.02	2.08	2.29	2.61	3.0

Esaminando i portafogli partendo da P=1 si vede che il peso del titolo A, quello caratterizzato da un minor rendimento atteso, aumenta, passando da 0 a 1. E' logico quindi aspettarsi che il rendimento atteso del portafoglio decresca monotonicamente via via che ci si sposta da P=1 a P=11.

L'andamento della deviazione standard del rendimento del portafoglio è invece diverso: esso è inizialmente decrescente, raggiunge il minimo in corrispondenza di P=7 e poi cresce. Questo risultato è importante, in quanto suggerisce che alcuni portafogli non verranno mai detenuti da un investitore avverso al rischio. Per esempio, i portafogli P=8, 9, 10 e 11, caratterizzati da un rendimento atteso più basso e da un rischio più alto rispetto al portafoglio P=7, non verranno mai acquistati dall'investitore avverso al rischio. In altre parole, alcuni portafogli sono più *efficienti* di altri.

I valori di μ_P e σ_P della Tabella 2 sono riprodotti nella Figura 2.

Figura 2. Grafico dei valori di μ_P (MI) e σ_P (SIGMA) riportati nella Tabella 2



La Figura 2 mostra chiaramente che i portafogli sul tratto inclinato negativamente della curva hanno minor rendimento atteso e maggior rischio (sono, partendo dal più basso a destra, i portafogli P=11, 10, 9 e 8 della Tabella 2). Notiamo che il portafoglio P=7 (quello in corrispondenza del quale la curva cambia concavità, cioè quello caratterizzato dal minor rischio) contiene quantità di entrambi i titoli, mentre il portafoglio P=11 contiene solo il titolo A. In generale, i portafogli che contengono quote di più attività finanziarie si dicono *diversificati*. Nell'esempio, il portafoglio P=7 è diversificato.

Ovviamente, i vantaggi della diversificazione dipendono dal valore del coefficiente di correlazione ρ_{AB}. Riprendiamo l'esempio sviluppato in precedenza considerando un portafoglio diversificato (si fissino $q_A = 0.6$ e $q_B = 0.4$) e facendo assume a ρ_{AB} i seguenti valori: 1, 0.5, 0, -0.5, -1. Utilizzando le formule sviluppate in precedenza possiamo calcolare il rendimento atteso del portafoglio diversificato e le differenti misure del rischio di tale portafoglio a seconda del valore assunto da ρ_{AB}. I risultati sono riportati nella Tabella 3.

Tabella 3. Rendimento atteso e deviazioni standard del rendimento del portafoglio diversificato, al variare di ρ_{AB}

ρ_{AB}	+1	+0.5	0	-0.5	-1
q_A	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
q_B	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
μ_P	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
σ^2_P	11.56	8.68	5.8	2.92	0.04
σ_P	3.4	2.95	2.41	1.71	0.2

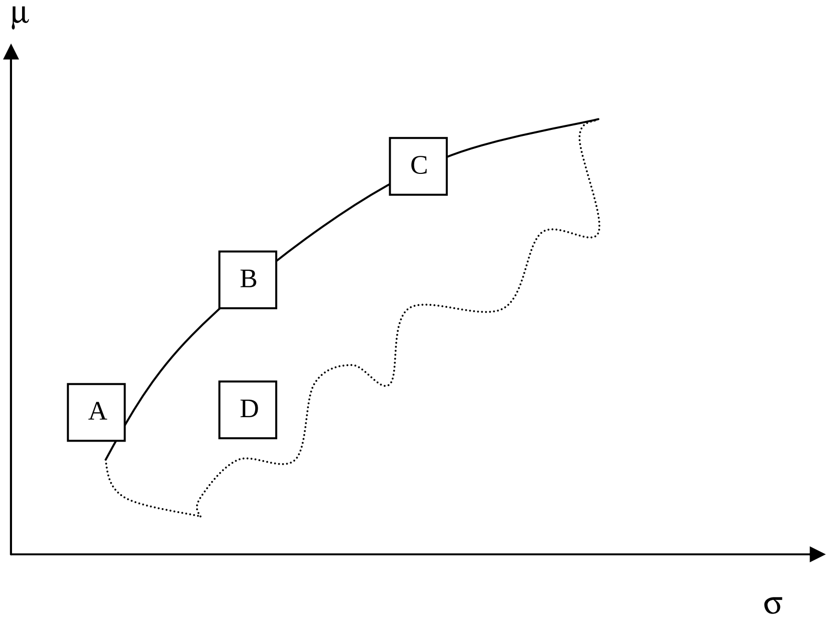
La Tabella 3 mostra che: i) un portafoglio composto da due attività finanziarie con perfetta correlazione positiva dei rendimenti è caratterizzato da un rischio pari alla media ponderata dei rischi delle due attività ($\sigma_P=q_A\sigma_A+q_B\sigma_B$), ma non consente di conseguire un'effettiva riduzione del rischio; ii) i veri vantaggi della diversificazione sono costituiti dalla riduzione del rischio che si ottiene combinando attività finanziarie i cui rendimenti hanno un coefficiente di correlazione inferiore a +1; iii) il rischio del portafoglio si riduce al diminuire del coefficiente di correlazione. Quando vi è perfetta correlazione negativa tra i rendimenti di due attività (ρ_{AB}=-1), tali attività possono essere combinate in modo da formare un portafoglio caratterizzato da rischio minimo.

Se facciamo variare ρ_{AB} possiamo costruire nel piano (μ,σ), per ciascun valore assunto da ρ_{AB}, altrettante curve simili a quella tracciata nella Figura 2. Questa mappa di curve mostra come, per un dato livello di rischio, al diminuire di ρ_{AB} aumenta μ e come, per un dato livello di μ, al diminuire di ρ_{AB} σ diminuisce. E' importante sottolineare inoltre che un investitore avverso al rischio non deterrà mai un portafoglio che si trovi sul tratto negativamente inclinato di tali curve. Tali portafogli, infatti, sono dominati dai portafogli appartenenti al tratto crescente, i quali offrono, a parità di rischio, rendimenti attesi più alti.

5. Le scelte ottime di portafoglio in presenza di diverse attività finanziarie rischiose

Ciascun portafoglio è caratterizzato da un dato rendimento atteso e da un dato rischio, per cui è facilmente rappresentabile con un punto nel piano (μ,σ). L'insieme di scelta di un investitore avverso al rischio sarà dato da tutti i portafogli che, per un dato valore della deviazione standard del rendimento presentano il rendimento atteso più alto, o, equivalentemente, dai portafogli che, per un dato valore del rendimento atteso, hanno la deviazione standard minore. L'insieme dei portafogli che soddisfano tale caratteristica si definisce *frontiera efficiente*. E' possibile dimostrare che, nel caso generale di più attività finanziarie rischiose, la frontiera efficiente ha la forma della curva continua riprodotta nella Figura 3.

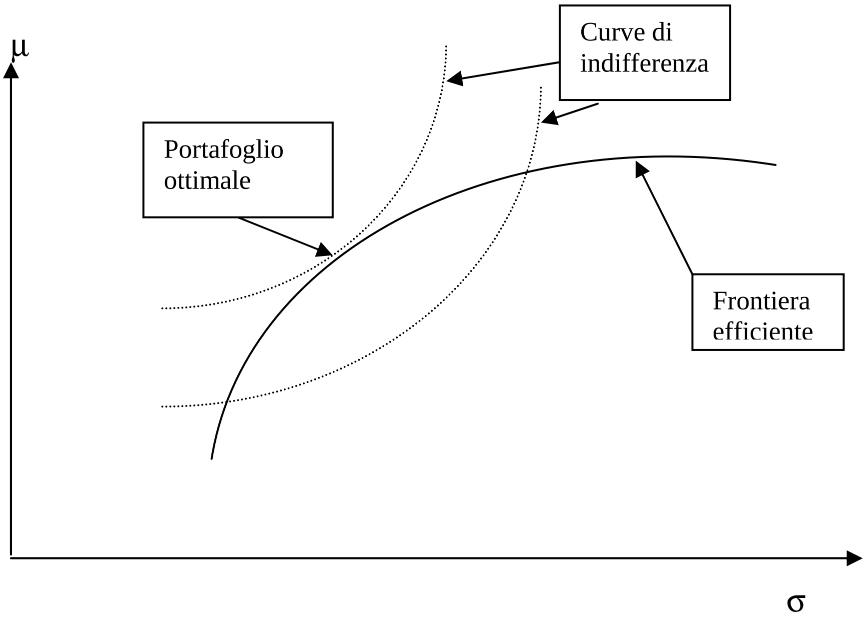
Figura 3. Frontiera efficiente



I portafogli A, B, C appartengono alla frontiera efficiente. Il portafoglio D appartiene invece all'area sottostante la frontiera, per cui vi è sempre un portafoglio sulla frontiera efficiente che è preferito a D. Per esempio, il portafoglio B è preferito al portafoglio D perché, a parità di rischio, B ha un rendimento atteso superiore a D, mentre il portafoglio A è preferito al portafoglio D perché, a parità di rendimento atteso, A ha un rischio inferiore a D.

La scelta del portafoglio ottimale avviene combinando le preferenze dell'investitore avverso al rischio con la frontiera efficiente. Il portafoglio ottimale sarà dato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la più alta curva di indifferenza dell'investitore (v. Figura 4). La frontiera efficiente è quindi interpretabile come vincolo dell'investitore perché descrive le opportunità concesse dal mercato dei capitali in termini di rendimento atteso e rischio ottenibili combinando le attività esistenti.

Figura 4. Scelta ottimale di portafoglio



Il portafoglio ottimale non è lo stesso per tutti gli investitori. Essendo il grado di avversione al rischio diverso per ciascun investitore, ciascun individuo avrà una propria funzione di utilità attesa. La mappa di curve di indifferenza nel piano (μ,σ), che, come sappiamo, descrive la funzione di utilità attesa, differirà da individuo a individuo. Il punto di tangenza tra la curva di indifferenza più elevata e la frontiera efficiente sarà pertanto diverso per ciascun investitore.

Nota: formalmente, $\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$. Come sappiamo, σ_A e σ_B sono le deviazioni standard dei rendimenti dei titoli A e B. Il simbolo σ_{AB} indica, invece, la *covarianza* tra il rendimento del titolo A e il rendimento del titolo B, calcolata come $\sigma_{AB} = \sum_{k=1}^{K} p_k \left(R_{Ak} - \mu_A\right)\left(R_{Bk} - \mu_B\right)$. Da tale espressione si nota che σ_{AB}=σ_{BA}.

Riferimenti bibliografici essenziali relativi alla lezione: "Microeconomia e scelte finanziarie", di Matteo Manera

Microeconomia

Beltratti, A. e M. Manera (2000), "Microeconomia e scelte finanziarie", in R. Tangorra (a cura di), *Temi e Problemi di Microeconomia*, Milano: Egea, pp. 35-45.

Katz, L. e H.S. Rosen (2003), *Microeconomia*, 2ª edizione, Milano: McGraw Hill, cap. 2

Finanza

Beltratti, A. (2000), *I Mercati Finanziari*, Roma: Carocci, capp. 1-3.

Econometria

Gallo, G.M. e B. Pacini (2002), *Metodi Quantitativi per i Mercati Finanziari*, Roma: Carocci, capp. 2-3, 6.

Koop, G. (2001), *Logica Statistica dei Dati Economici*, Torino: Utet, capp. 1-5.